TITLE:

離散可積分系における密度行列の方法 (固有関数展開の視点から) (離散可積分系に関する最近の話題)

AUTHOR(S):

青本, 和彦

CITATION:

青本, 和彦. 離散可積分系における密度行列の方法 (固有関数展開の視点から) (離散可積分系に関する最近の話題). 数理解析研究所講究録 2000, 1170: 56-81

ISSUE DATE:

2000-09

URL:

http://hdl.handle.net/2433/64410

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
1170 巻 2000 年 56-81

離散可積分系における密度行列の方法（固有関数展開の視点から）

青本 和彦
名古屋大学多元数理科学研究科
(Graduate School of Mathematics, Nagoya University)

October 27, 1999

1 序

前世紀終りに Stieltjes によって展開された Stieltjes 積分および Stieltjes 変換は, 1 変数直交多項式の一般論を生み, Pade 近似との関連を明らかにした。

さらに、極限点, 極限円, モーメント問題などの興味ある問題が提起されてきた。そこには、作用素の自己共役性の問題がある.

また周知のように、今世紀初頭に Von Neumann によって示されたように, Sieltjes 測度は量子力学の基礎づけとして線形作用素のスペクトル核を表示する中心的役割をになうこととなり, 現在にいたっている。

1950 年の前後に、2 階線形常微分方程式（Sturm-Liouville 方程式）の固有関数展開の理論が確立された（K.Kodaira, E.C.Titchmarsh, M.G.Krein, I.M.Gelfand, B.M.Levitan, N.Levinson など)。

そこに登場するのが この Sieltjes 測度を用いて表される 密度行列である。次の論文の中で はじめて そのことが明確にされた。

K.Kodaira The eigenvalue problem for ordinary differetial equations of the second order and Heisenberg's theory of S-matrices. Amer. J. Math., 71(921-945)

この理論の差分版は [5] にある。

しかし、KdV 方程式や 戸田方程式の論文はおびただしい数にのぼるが、密度行列との関連を明記してある文献は以外と少ないように見える。

このノートの目的は 密度行列が 可積分系、特に離散可積分系 (LR-アルゴリズム) にどのような役割を果たしているかをいくつかの例で示すことである。なお、密度行列を使う方法の原型は、作用素が有限行列の場合の Lax 方程式については [11] や、 半無限行列の場合の [6] に見い出される。

2 Von Neumann のスペクトル分解

A をある 可分な $\mathbf{C}$ 上の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする。このとき、増大する射影作用素の族 $E(\lambda)(\lambda \in \mathbf{R})$ があって, 次のスペクトル分解公式が成り立つ。

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda) \tag{2.1}$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda) \tag{2.2}$$

A の定義域を $\mathcal{D}(A)$ で表すとき、$\mathcal{D}(A)$ は $\mathcal{H}$ の中で密であって、

$$x \in \mathcal{D}(A) \Longleftrightarrow \int_{\infty}^{\infty} \lambda^2 (dE(\lambda)x, x) < \infty$$

である。ただし、(,) は $\mathcal{H}$ の内積を表す。

以下、A は断らぬ限り、自己共役な 実 Jacobi 行列、$\mathcal{H}$ は 絶対 2 乗和可能な複素数値数列空間 $l^2(\mathbf{Z})$ とする。

A が半無限行列で、$\mathcal{H} = l^2(\mathbf{Z})_{\geq 0}$ のときは、次節で 直交多項式との関連で考察する。

$$A = (a_{i,j})_{i,j=-\infty}^{\infty}, \quad a_{i,j} = a_{j,i} \text{ かつ } a_{i,j} = 0 \ |i-j| > 1$$

とする。

このとき、レゾルベント $R(A;z) = (z-A)^{-1}$ は $\Im z \neq 0$ のとき、有界な対称作用素である。

射影作用素 $dE(\lambda)$ は、α, β が連続点のとき、公式

$$\begin{aligned} E(\beta) - E(\alpha) &= \int_{\alpha}^{\beta} dE(\lambda) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{\lambda - i\epsilon - A} - \frac{1}{\lambda + i\epsilon - A}\right) d\lambda \end{aligned} \tag{2.3}$$

で与えられる。$R(A;z)$ および $dE(\lambda)$ に対応する核はそれぞれ Green 関数 $G(n,m;z)$ および スペクトル核 $d\Theta(n,m;\lambda)$ で与えられる。故に

$$\begin{aligned} &\Theta(n,m|\beta) - \Theta(n,m|\alpha) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} (G(n,m|\lambda - i\epsilon) - G(n,m|\lambda + i\epsilon)) d\lambda \end{aligned} \tag{2.4}$$

が成り立つ。

さらに、(2.1),(2.2) は それぞれ

$$\delta_{n,m} = \int_\alpha^\beta d\Theta(n,m;\lambda) \tag{2.5}$$

$$a_{n,m} = \int_\alpha^\beta \lambda d\Theta(n,m;\lambda) \tag{2.6}$$

で与えられる。

3 Jost 解

以下、

$$a_{n,n} = a_n,\ \ a_{n,n+1} = a_{n+1,n} = b_n$$

とおく。$\psi(n)$ に関する A の固有方程式

$$(A\psi)(n) = z\psi(n) \tag{3.1}$$

すなわち、2 階差分方程式

$$b_{n-1}\psi(n-1) + a_n\psi(n) + b_n\psi(n+1) = z\psi(n),\ \ -\infty < n < \infty \tag{3.2}$$

を考察する。(3.2) の基本解 $\{y_1(n;z)\}$ $\{y_2(n;z)\}$ を それぞれ 初期条件

$$y_1(-1;z) = 0, y_1(0,z) = 1;\ \ y_2(0;z) = 0, y_2(1,z) = 1 \tag{3.3}$$

によって定義する。$y_1(n;z)$, $y_2(n;z)$ は z について 多項式である。
さて、$\Im z \neq 0$ のとき、(3.2) の解で

$$\psi(n;z) \in l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{3.4}$$

を満たす非自明なものが スカラー倍を除いて一意に存在する。それを $\psi^+(n;z)$ とおく。これは $n = +\infty$ での Jost 解である。同じく、

$$\psi(n;z) \in l^2(\mathbb{Z}_{\leq 0}) \tag{3.5}$$

を満たす非自明な $n = -\infty$ での Jost 解 $\psi^-(n;z)$ が スカラー倍を除いて一意に存在する。
比 $\frac{\psi^+(n;z)}{\psi^+(n-1;z)}$ は 広義一様収束する連分数展開

$$b_{n-1}\frac{\psi^+(n;z)}{\psi^+(n-1;z)} = \frac{b_{n-1}^2 \,|}{|\, z - a_n} - \frac{b_n^2 \,|}{|\, z - a_{n+1}} - \cdots \tag{3.6}$$

で表示される。

いま、Wronskian を

$$W(\psi^+,\psi^-) = b_{n-1}(\psi^+(n-1;z)\psi^-(n;z) - \psi^+(n;z)\psi^-(n-1;z)$$

とおくときは、Green 核は

$$G(n,m;z) = \begin{cases} -\frac{\psi^+(n;z)\psi^-(m;z)}{W(\psi^+,\psi^-)} & n \geq m \\ -\frac{\psi^+(m;z)\psi^-(n;z)}{W(\psi^+,\psi^-)} & n \leq m \end{cases}$$

で与えられる。

従って、Jost 解 $\psi^\pm$ は、また

$$K^+(n;z)(=\frac{\psi^+(n;z)}{\psi^+(0;z)}) = \lim_{m\to-\infty}\frac{G(n,m;z)}{G(0,m;z)} \tag{3.7}$$

$$K^-(n;z)(=\frac{\psi^-(n;z)}{\psi^-(0;z)}) = \lim_{m\to+\infty}\frac{G(n,m;z)}{G(0,m;z)} \tag{3.8}$$

という Martin 核 の形で表示されることになる。

Proposition 1 ([2] 参照) $K^\pm(n;\lambda+i0)$ が 閉区間 $[\alpha,\beta]$ で存在するものとする。A の固有値を λ_j, 対応する正規化された固有関数を $u_j(n), (\sum_{n=-\infty}^{\infty}|u_j(n)|^2 = 1)$ $j=1,2,3,\ldots$ とする。このとき、連続スペクトルを与える密度関数 $d\mu_\pm(\lambda)$ が一意に存在して、次の等式（A の固有関数展開）が成り立つ。

$$\begin{aligned}\Theta(n,m;\beta) - \Theta(n,m;\alpha) &= \sum_{\alpha<\lambda_j<\beta} u_j(n)u_j(m) \\ &+ \int_\alpha^\beta d\mu_+(\lambda)K^+(n;\lambda+i0)\overline{K^+(m;\lambda+i0)} + \int_\alpha^\beta d\mu_-(\lambda)K^-(n;\lambda+i0)\overline{K^-(m;\lambda+i0)}\end{aligned} \tag{3.9}$$

あるいは、(3.9) は、簡略に

$$\begin{aligned}d\Theta(n,m;\lambda) &= \sum_{\lambda_j}\delta(\lambda-\lambda_j)u_j(n)u_j(m) \\ &+ K^+(n;\lambda+i0)\overline{K^+(m;\lambda+i0)}d\mu_+(\lambda) + K^-(n;\lambda+i0)\overline{K^-(m;\lambda+i0)}d\mu_-(\lambda)\end{aligned} \tag{3.10}$$

ここで、$d\mu_\pm(\lambda)$ は

$$\mu_+(\beta) - \mu_+(\alpha) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\epsilon}{\pi} \int_\alpha^\beta \sum_{m=-\infty}^{0} |G(0,m;\lambda + i\epsilon)|^2 d\lambda$$

$$\mu_-(\beta) - \mu_-(\alpha) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\epsilon}{\pi} \int_\alpha^\beta \sum_{m=0}^{\infty} |G(0,m;\lambda + i\epsilon)|^2 d\lambda \tag{3.11}$$

によって与えられる。

4 直交多項式と密度行列

実軸上の 正の Stieltjes 測度 $d\rho(\lambda)$ があるとする。簡単のために、その 台 (support) は 有限区間 $[\alpha,\beta]$ で、無限個の点て増分があるものとする。多項式のなす線形空間の 単項列の基底

$$1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, ...$$

から出発して、Schmidt の直交化により 正規直交多項式

$$p_0(\lambda), p_1(\lambda), p_2(\lambda), ..., p_n(\lambda), ... \tag{4.1}$$

を

$$p_n(\lambda) = k_n \lambda^n + (\text{低次}) \quad k_n > 0 \tag{4.2}$$

$$\int_\alpha^\beta p_n(\lambda) p_m(\lambda) d\rho(\lambda) = \delta_{n,m} \tag{4.3}$$

を満たすように、一意に定義することができる。

$d\rho(\lambda)$ の Sieltjes 変換の Laurent 展開は モーメント

$$c_n = \int_a^b \lambda^n d\rho(\lambda) \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{4.4}$$

を用いて、

$$F(z) = \int_a^b \frac{d\rho(\lambda)}{z - \lambda} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \cdots \tag{4.5}$$

で与えられる。

c_n から定められる Hankel 行列が 正定値とする。このとき、直交多項式 $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ は $F(z)$ の Pade 近似によっても特徴づけられる。

実際、各 n について n 次多項式 $\hat{p}_n(z)$, および $n-1$ 次多項式 $q_n(z)$ (ただし、$q_0(z)=0$) が定数倍を除いて一意に存在し、次を満たす。

$$\frac{q_n(z)}{\hat{p}_n(z)} - F(z) = O(z^{-n-1}) \tag{4.6}$$

$n=0,1,2,3,\dots$.

(4.6) より、

$$\int_a^b \hat{p}_n(\lambda)\hat{p}_m(\lambda)d\rho(\lambda) = 0, \quad n \neq m \tag{4.7}$$

$$q_n(\lambda) = \int_a^b \frac{\tilde{p}_n(\lambda) - \tilde{p}_n(\mu)}{\lambda - \mu} d\rho(\mu) \tag{4.8}$$

を得る。

したがって、$\hat{p}_n(z)$ は $p_n(z)$ のスカラー倍である。

数列 $\{p_n(z)\}_{n\geq 0}$, $\{q_n(z)\}_{n\geq 0}$ は ある対称な Jacobi 行列 $A=(a_{n,m})_{n,m=0}^{\infty}$ に対して、固有方程式 (3.1),(3.2) を満たす。

もしも Stieltjes 測度 $d\rho(\lambda)$ のモーメント $(c_n)_{n\geq 0}$ について、モーメント問題が一意ならば、作用素 A は自己共役である。我々は $d\rho$ の台が 有限区間と仮定したから、これは自動的に満たされている。従って、A は自己共役な有界作用素である。

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}=l^2(\mathbf{Z})_{\geq 0}$ の標準的正規直交基底を

$$e_k = (\delta_{n,k})_{n=0}^{\infty} \quad k=0,1,2,3,\dots$$

ととる。このとき、

Lemma 1

$$d\rho(\lambda) = (dE(\lambda)e_0, e_0) \tag{4.9}$$

$$p_n(A)e_0 = e_n, \quad n=0,1,2,\dots \tag{4.10}$$

Lemma 2 定数倍を除いて、

$$\psi^+(n;z) = p_n(z)F(z) - q_n(z) \tag{4.11}$$

$$\psi^-(n;z) = p_n(z) \tag{4.12}$$

が成り立つ。

実際、$|z|$ が十分大のとき、$\psi^+(n;z)$ は $n\to\infty$ で 0 に収束する (3.1) の唯一の解であるし、$\psi^-(n;z)$ は $n=-1$ のとき 0 になる (3.1) の唯一の解である。

作用素 A の連続スペクトルの密度行列 $d\mu_\pm(\lambda)$ については、

Lemma 3

$$d\mu_-(\lambda) = 0$$
$$d\mu_+(\lambda) = d\rho(\lambda) \text{ の連続部分}$$

実際、Proposition 1 および (4.10),(4.11) より容易に導かれる。
従って、固有関数展開定理はよく知られた公式

$$\Theta(n,m;\beta) - \Theta(n,m;\alpha) = \int_\alpha^\beta p_n(\lambda)p_m(\lambda)d\rho(\lambda) \tag{4.13}$$

すなわち、

$$d\Theta(n,m;\lambda) = p_n(\lambda)p_m(\lambda)d\rho(\lambda) \tag{4.14}$$

に帰着する。そして、(2.1),(2.2) はそれぞれ

$$\delta_{n,m} = \int_a^b p_n(\lambda)p_m(\lambda)d\rho(\lambda) \tag{4.15}$$
$$a_{n,m} = \int_a^b \lambda p_n(\lambda)p_m(\lambda)d\rho(\lambda) \tag{4.16}$$

と表される。

5 LR アルゴリズムと 直交多項式

いま、$f(x)$ を $[a,b]$ 上、正の連続関数とする。すると、前節において、$f(A)$ は正定値有界作用素である。

$$(f(A)x,x) \geq c\|x\| \quad c > 0$$

このとき、対角成分が正となる 上（下）3 角行列作用素 $B_+(B_-)$ が一意に存在して、

$$f(A) = B_- \cdot B_+ \tag{5.1}$$

$B_\pm$ および $B_\pm^{-1}$ はともに有界作用素である。$f(A)$ を用いた A の LR-変換は 対応

$$A \to A' = B_-^{-1} \cdot A \cdot B_- = B_+ \cdot A \cdot B_+^{-1} \tag{5.2}$$

によって定義される。$B_\pm$は 一般には Jacobi 行列ではない。それにもかかわらず、A'は 常に 対称な Jacobi 行列である。

Proposition 2 作用素 A を 作用素 A' に対応させる変換は密度の線形変換 $d\rho(\lambda) \to d\rho'(\lambda)$

$$d\rho'(\lambda) = f(\lambda) d\rho(\lambda) \tag{5.3}$$

に同値である。

正規化された密度,*i.e.*,

$$\int_a^b d\rho(\lambda) = 1$$

については、次の変換 (5.3) は 射影変換に置き換えられなくてはいけない。

$$d\rho(\lambda) \to d\rho'(\lambda) = \frac{f(\lambda) d\rho(\lambda)}{\int_a^b f(\lambda) d\rho(\lambda)} \tag{5.4}$$

特に、A が正定値で $f(x) = x$ のときが、Rutishauser の LR アルゴリズムである。

例 1. Jacobi 多項式

α, β を -1 より大きい実数とする。区間 $[-1, 1]$ において、密度 $d\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx$ に関する直交多項式は Jacobi 多項式である。すなわち、

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \{(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}\} \tag{5.5}$$

とおくとき、

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = l_n^{(\alpha,\beta)} x^n + \cdots$$
$$l_n^{(\alpha,\beta)} = 2^{-n} \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) dx = 0, \ \ n \neq m$$
$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^2 dx = h_n^{(\alpha,\beta)}$$
$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

が得られる。

$$p_n(x) = \{h_n^{(\alpha,\beta)}\}^{-\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

とおけば、$p_n(x)$ は 密度 $d\rho(x)$ に関して正規直交多項式である。
変換 $\alpha \to \alpha+1$ によって、密度の変換

$$d\rho(x) \to d\rho'(x) = (1-x)d\rho(x) \tag{5.6}$$

が引き起こされる。$1-A$ は半正定値なので Gauss 分解

$$1-A = B_- \cdot B_+ \tag{5.7}$$

が一意に得られる。同様にして、

$$1+A = B_- \cdot B_+ \tag{5.8}$$

も得られる。こうして得られる 3 角作用素 $B_\pm$ は直交多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ のパラメータα, β についての 隣接関係式に対応している。
実際、

$$\psi_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{l_n^{(\alpha,\beta)}} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = x^n + \cdots$$

とおくときは、隣接関係式

$$\begin{aligned} \psi_n(\alpha,\beta) &= \psi_n(\alpha+1,\beta) + v_n\psi_{n-1}(\alpha+1,\beta) \\ v_n &= -\frac{2n(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)} \end{aligned} \tag{5.9}$$

が成り立つ。
例 2. Askey-Wilson 多項式
q を $0<q<1$ を満たす実数とし、c_1, c_2, c_3, c_4 を実数とする。底 q の m 次 底つき超幾何関数

$${}_m\varphi_{m-1}\left(\begin{matrix} a_1,\cdots,a_m \\ b_1,\cdots,b_{m-1}\end{matrix}; x\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_\nu \cdots (a_m;q)_\nu}{(b_1;q)_\nu \cdots (b_{m-1};q)_\nu (q;q)_\nu} x^\nu \tag{5.10}$$

に対して、x の n 次多項式

$$\begin{aligned} & p_n(x;c_1,c_2,c_3,c_4) \\ = \;& c_1^{-n}(c_1c_2;q)_n \cdot (c_1c_3;q)_n \cdot (c_1c_4;q)_n {}_4\varphi_3\left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{n-1}c_1c_2c_3c_4, c_1e^{i\theta}, c_1e^{-i\theta} \\ c_1c_2, c_3c_4, c_1c_4 \end{matrix}; q\right) \\ = \;& l_n x^n + \cdots \qquad (l_n = 2^n(c_1c_2c_3c_4q^n;q)_n) \end{aligned} \tag{5.11}$$

が定義される。ただし、$x = cos\theta$ である。
重み関数 $w(x)$ $(d\rho(x) = w(x)dx)$ は

$$w(x)=\frac{\prod_{k=0}^{\infty}(1-2(2x^2-1)q^k+q^{2k})}{h(x,c_1)h(x,c_2)h(x,c_3)h(x,c_4)} \tag{5.12}$$

ここで、

$$h(x,a)=\prod_{k=0}^{\infty}(1-2axq^k+q^{2k}a^2)=(ae^{i\theta};q)_\infty(ae^{-i\theta};q)_\infty \tag{5.13}$$

である。

このとき、直交関係式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}p_n(x;c_1,c_2,c_3,c_4)p_m(x;c_1,c_2,c_3,c_4)\frac{w(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\delta_{n,m}h_n \tag{5.14}$$

が成り立つ。ただし、

$$h_n=\frac{(c_1c_2c_3c_4q^{2n};q)_\infty(c_1c_2c_3c_4q^{n-1};q)_\infty(q^{n+1};q)_\infty^{-1}(c_1c_2q^n;q)_\infty^{-1}}{(c_1c_3q^n;q)_\infty(c_1c_4q^n;q)_\infty(c_2c_3q^n;q)_\infty(c_2c_4q^n;q)_\infty(c_3c_4q^n;q)_\infty} \tag{5.15}$$

$p_n(x;c_1,c_2,c_3,c_4)$ の満たす 2 階差分方程式は

$$2xp_n(x)=b_{n-1}p_{n-1}(x)+a_np_n(x)+b'_np_{n+1}(x) \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
b_{n-1}&=(1-q^n)(1-c_1c_2q^{n-1})(1-c_1c_3q^{n-1})(1-c_1c_4q^{n-1})\\
&\quad\times\frac{(1-c_2c_3q^{n-1})(1-c_2c_4q^{n-1})(1-c_3c_4q^{n-1})}{(1-cq^{2n-2})(1-cq^{2n-1})},\\
b'_n&=\frac{1-cq^{n-1}}{(1-cq^{2n-1})(1-cq^{2n})},\\
a_n&=\frac{q^{n-1}[(1+cq^{2n-1})(sq+s'c)-q^{n-1}(1+q)(s+s'q)c]}{(1-cq^{2n-2})(1-cq^{2n})}
\end{aligned}$$

$(s=c_1+c_2+c_3+c_4,\ s'=c_1^{-1}+c_2^{-1}+c_3^{-1}+c_4^{-1},\ c=c_1c_2c_3c_4)$ である。

$d\rho(x)$ は c_1,c_2,c_3,c_4 に依存する。実際 シフト

$$T_1:c_1\to c_1q;\ T_2:c_2\to c_2q;\ T_3:c_3\to c_3q;\ T_4:c_4\to c_4q \tag{5.17}$$

に応じて、$w(x)$ はそれぞれ

$$1+c_1^2-2c_1x\ ,1+c_2^2-2c_2x\ ,1+c_3^2-2c_3x\ ,1+c_4^2-2c_4x\ , \tag{5.18}$$

倍される。

これらの変換に対応する Jacobi 作用素 A の LR アルゴリズムはそれぞれ $1+A^2-2c_1A>0$, $1+A^2-2c_2A>0$, $1+A^2-2c_3A>0$, $1+A^2-2c_4A>0$ の Gauss 分解 (5.1) を求めて得られる。実際、

$$\psi_n(x;c_1,c_2,c_3,c_4)=\frac{1}{l_n}p_n(x;c_1,c_2,c_3,c_4) \tag{5.19}$$

に関する隣接関係式は, T_1については

$$\psi_n(x;c_1,c_2,c_3,c_4)=\psi_n(x;c_1q,c_2,c_3,c_4)+v_n\psi_{n-1}(x;c_1q,c_2,c_3,c_4)$$
$$v_n=-\frac{2(1-q)c_1}{(1-aq^{2n-2})(1-aq^{2n-1})(1-c_2c_3q^{n-1})(1-c_2c_4q^{n-1})(1-c_3c_4q^{n-1}}$$

の形で得られる。T_2, T_3, T_4についても同様である。

6 差分系と逆散乱 (H.Flaschka の理論の応用)

再び、作用素 A を $\mathcal{H}=l^2(\mathbf{Z})$ で考える。

次の条件を仮定する。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|b_n-\frac{1}{2}||n|<\infty,\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n||n|<\infty \tag{6.1}$$

スペクトルパラメータ を $z=\frac{1}{2}(\zeta+\zeta^{-1})$ とおく。$|\zeta|<1$ のとき、$n\to\pm\infty$ に対する Jost 解$\psi^{\pm}(n;z)$ は

$$\psi^{\pm}(n;z)\asymp\zeta^{\pm n}\quad n\to\pm\infty \tag{6.2}$$

で特徴づけられる。$\psi^{\pm}(n;z)$ のあいだの接続関係式は

$$\psi^{-}(n;z)=\alpha(z)\tilde{\psi}^{\pm}(n;z)+\beta(z)\psi^{\pm}(n;z) \tag{6.3}$$

で与えられるものとする。ただし、$\tilde{\psi}^{\pm}(n;\zeta)=\psi^{+}(n;\zeta^{-1})$

反射係数, Wronskian はそれぞれ

$$R(z)=\frac{\beta(z)}{\alpha(z)} \tag{6.4}$$

$$W(\psi_+,\psi_-)=\frac{1}{2}(\zeta^{-1}-\zeta)\alpha(z) \tag{6.5}$$

$\lambda \in [-1,1]$ のとき、$\psi^{\pm}(n;\lambda+i0)$, $\alpha(\lambda+i0)$, $\beta(\lambda+i0)$ は存在する。また、$\alpha(\lambda)$ は λが 実数で $|\lambda|>1$ のとき、有限個の単純な零点をもつ。それらを、λ_k, $k=1,2,3,...,s$ とする。

次の固有関数展開公式が成り立つ。

Proposition 3 (1) $\psi^{\pm}(n;z)$ を用いて

$$\begin{aligned} & d\Theta(n,m;\lambda) \\ = & \frac{d\lambda}{2\pi\sqrt{1-\lambda^2}|\alpha(\lambda+i0)|^2}\{\psi^+(n;\lambda+i0)\overline{\psi^+(n;\lambda+i0)}+\psi^-(n;\lambda+i0)\overline{\psi^-(n;\lambda+i0)}\chi_{[-1,1]}(\lambda) \\ + & \sum_{k=1}^{s}\psi^+(n;\lambda_k)\psi^+(m;\lambda_k)c_k^2\delta(\lambda-\lambda_k)d\lambda \end{aligned} \tag{6.6}$$

ここで、$c_k^2=\frac{\beta(\lambda_k)}{\alpha'(\lambda_k)\sqrt{\lambda_k^2-1}}$ であり、$\chi_{[-1,1]}(\lambda)$ は $[-1,1]$ の特性関数。

(2) あるいは、$\psi^+(n;\lambda+i0)$, $\psi^+(n,\lambda-i0)$ を用いて

$$\begin{aligned} & d\Theta(n,m;\lambda) \\ = & \frac{d\lambda}{2\pi\sqrt{1-\lambda^2}}\{\psi^+(n;\lambda+i0)\overline{\psi^+(m;\lambda+i0)}+\psi^+(n;\lambda-i0)\overline{\psi^+(m;\lambda-i0)} \\ + & R(\lambda+i0)\psi^+(n;\lambda+i0)\overline{\psi^+(m;\lambda-i0)}+R(\lambda-i0)\psi^+(n;\lambda-i0)\overline{\psi^+(m;\lambda+i0)}\chi_{[-1,1]}(\lambda)\} \\ + & \sum_{k=1}^{s}\psi^+(n;\lambda_k)\psi^+(m;\lambda_k)c_k^2\delta(\lambda-\lambda_k)d\lambda \end{aligned} \tag{6.7}$$

$\psi^{\pm}(n;z)$ の Fourier 級数表示

$$\psi^+(n;z)=\sum_{m\geq n}K(n,m)\zeta^m \tag{6.8}$$

を用いて (6.6),(6.7) を書き換える。

$$F(m)=F_c(m)+F_p(m), \tag{6.9}$$

$$F_c(m)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}R(\zeta)\zeta^{m-1}d\zeta \tag{6.10}$$

$$F_p(m)=\sum_{k=1}^{s}c_k^2\zeta_k^m \tag{6.11}$$

核関数 $\{F(n+m)\}_{n,m=-\infty}^{\infty}$ $\{K(n,m)\}_{n,m=-\infty}^{\infty}$ が表す作用素を それぞれ $\hat{F}$, $\hat{K}$ であらわす。$\hat{F}$は Fredholm 型 Hankel 行列であり、$\hat{K}$ は有界な逆を持つ有界な上 3 角行列である。そして

Proposition 4 (2.1),(2.2) はそれぞれ

$$1 = \hat{K}(1 + \hat{F})^t\hat{K} \tag{6.12}$$
$$A = \hat{K}A_0(1 + \hat{F})^t\hat{K} = \hat{K}A_0\hat{K}^{-1} \tag{6.13}$$

と表される (*Gelfand-Levitan-Marchenko* 分解)。ここで、${}^t\hat{K}$ は $\hat{K}$の転置をあらわす。

A_0 は 成分が $b_n = \frac{1}{2}$, $a_n = 0$ の対称 *Jacobi* 行列を意味する。

$1 + \hat{F}$ は正定値の対称行列で、等式 (6.12) により $\hat{K}$ は一意に決る。

A_0の一意な分解

$$A_0 = A_{0,+} + A_{0,-} \tag{6.14}$$

($A_{0,+}, A_{0,-}$ はそれぞれ 上および下の 3 角行列) がある。$2A_{0,\pm}$ は番号を 1 だけ上下にずらすユニタリ作用素である。

7 LR-アルゴリズムと密度行列の変換

A は有界作用素であるから、ある正定数 c があって $A + c$ は正定値である。そこで、

$$A + c > 0, \ (A + c)^{-1} > 0$$

となるような、c をひとつ固定する。$A(c) = A + c$,$A_0(c) = A_0 + c$ とおく。明らかに、$A_0(c)^{\pm 1} > 0$ である。

いま $A(c)$ の Gauss 分解

$$A(c) = A_-(c) \cdot A_+(c) \tag{7.1}$$

($A_+(c), A_-(c)$ はそれぞれ 対角成分が正である、上および下の 3 角 Jacobi 行列で、$A_-(c) = {}^tA_-(c)$) があるとする。

このとき、LR-変換

$$A \to A' = A_+(c) \cdot A_-(c) = A_+(c) \cdot A \cdot A_-(c)^{-1} \tag{7.2}$$

が定義される。A' も 対称な Jacobi 行列である。

Theorem 1 A' の *GLM* 分解を

$$1 = K' \cdot (1 + \hat{F}') \cdot {}^t\hat{K}' \tag{7.3}$$
$$A' = K' \cdot A_0 \cdot (1 + \hat{F}') \cdot {}^t\hat{K}' \tag{7.4}$$

とおくとき、A' が A の LR-変換であることの必要十分条件は

$$\hat{F}' = \hat{F}\cdot A_{0,-}(c)\cdot A_{0,-}(c)^{-1} = A_{0,+}(c)\cdot\hat{F}\cdot A_{0,+}(c)^{-1} \tag{7.5}$$

である。ただし、$A_{0,\pm}(c)$ は $A_0(c)$ の *Gauss* 分解における上下 *3* 角行列を表す。($\hat{F}\cdot A_{0,\pm}(c) = A_{0,\mp}(c)\cdot\hat{F}$ に注意。)

$$g(\zeta) = \frac{\sqrt{c+1}-\sqrt{c-1}}{2}\zeta + \frac{\sqrt{c+1}+\sqrt{c-1}}{2}$$

は

$$z + c = g(\zeta)g(\zeta^{-1})$$

の解である。このとき、反射係数 $R(\zeta)$ を用いて述べれば、(7.5) は等式

$$R'(\zeta) = R(\zeta)g(\zeta)^{-1}g(\zeta^{-1}) \tag{7.6}$$

と同等である。

Remark 1 等式 (7.5) は *Zakhalov-Shabat* の *"dressing method"* と密接な関係がある。実際、もしも $\hat{F}$ が恒等作用素ならば、$\hat{F}'$は $A_{0,\pm}$で *"dressing"* されていることになる。LR-変換は、この意味で *"dressing "* 変換そのものであると言える。このことをご指摘いただいた筧三郎さんに感謝します。なお、筧さんの論文 [9] では、シンプレクティックの場合にこの *"dressing method'* が拡張されている。この場合に我々の議論をするとなると、いわゆる不定値の計量を持つ関数空間の上でやらねばならないように見えるので、かなり難しいかも知れない.

Proof 1 まず、(7.5) から (7.2) を導く。
(7.3),(7.4),(7.5) および 表式の一意性より、等式

$$\hat{K}' = A_+(c)\cdot\hat{K}\cdot g(2A_{0,+}) \tag{7.7}$$

が得られる。故に、

$$\begin{aligned} A' = \hat{K}'\cdot A_0\cdot(1+\hat{F}')\cdot{}^t K' &= A_+(c)\hat{K}g(2A_{0,+})A_0 g(2A_{0,-})^{-1}\hat{K}^{-1}A_+(c)^{-1} \\ &= A_+(c)\hat{K}A_0\hat{K}^{-1}A_+(c)^{-1} = A_+(c)\cdot A\cdot A_+(c)^{-1} \end{aligned}$$

こうして、(7.2) が得られる。

次に、逆を証明する。まず、$A_{0,+}$ と可換な上 *3* 角有界作用素は $2A_{0,+}$ の解析関数であることに注意する。(6.13),(7.4) より、ζのある正則関数 $\tilde{g}(\zeta)$ ($|\zeta|<1$) が存在して、

$$\hat{K}' = A_+(c) \cdot \hat{K} \cdot \tilde{g}(2A_{0,+}) \tag{7.8}$$

(6.12),(7.3) より、

$$\tilde{g}(2A_{0,+})\tilde{g}(2A_{0,-}) + \tilde{g}(2A_{0,+})^2\hat{F}' = A_0(c)^{-1}(1+\hat{F}) \tag{7.9}$$

表示の一意性より、

$$\tilde{g}(2A_{0,+})\tilde{g}(2A_{0,-}) = A_0(c)^{-1} \tag{7.10}$$

$$\tilde{g}(2A_{0,+})^2\hat{F}' = A_0(c)^{-1}\hat{F} \tag{7.11}$$

(7.10) より

$$\tilde{g}(2A_{0,+}) = A_{0,+}(c)^{-1} \tag{7.12}$$

故に、

$$A_{0,+}(c)^{-2}\hat{F}' = A_0(c)^{-1}\hat{F} \tag{7.13}$$

すなわち、(7.5) を得る。

8 周期戸田格子の場合

A は周期 N の周期 Jacobi 行列とする。i.e.,

$$a_{n+N} = a_n, b_{n+N} = b_n \tag{8.1}$$

h を Floquet の乗数とし、 $N \times N$ の行列 $A_h = (\tilde{a}_{n,m})_{n,m=0}^{N-1}$ を

$\tilde{a}_{n,m} = hb_{N-1}\ (n,m) = (N-1,0), h^{-1}b_{N-1}\ (n,m) = (0,N-1), a_{n,m}$ その他

と定義する。

行列式を 0 にする方程式

$$det[z - A_h] = -b_0b_1\cdots b_{N-1}(h + h^{-1} - \Delta) \tag{8.2}$$

とおくとき、Δ は

$$b_0b_1\cdots b_{N-1}\Delta = z^N - (a_0 + a_1 + \cdots + a_{N-1})z^{N-1} + \cdots$$

と表される N次多項式である。(8.2) を 0 にする h は

$$h = \frac{\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 4}}{2} \tag{8.3}$$

と表され、種数 $N-1$ の超楕円曲線を定義する。

$\Delta^2 - 4 = 0$ を満たす $2N$個の実根を大きさの順に

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{2N-1} < \lambda_{2N}$$

とする。

$|h| = 1$ すなわち、$|\Delta| < 4$ となるのは

$$\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \cup [\lambda_3, \lambda_4] \cup \cdots \cup [\lambda_{2N-1}, \lambda_{2N}] \tag{8.4}$$

言い変えれば、A のスペクトラムは すべて連続であって、そのスペクトル集合 $\sigma(A)$ は (8.4) で与えられる。

$\lambda \notin \sigma(A)$ のとき、$|h| \neq 1$ であるが、$|h| < 1$ 仮定してよい。

A の固有関数における Bloch 解 (i.e., $n = \pm\infty$ に応じる Jost 解) $\psi^{\pm}(n; z)$ は、それぞれ

$$\psi^{\pm}(n + N; z) = h^{\pm 1}\psi^{\pm}(n; z) \tag{8.5}$$

を満たす。$\psi^{\pm}(n; z)$ は有限次元固有方程式

$$(z - A_h)\tilde{\psi} = 0 \tag{8.6}$$

を解いて得られる。

特に、$n = 0$ のとき、1 に等しくなるように正規化したものを $K^{\pm}(n; z)$ で表す。

一般に $i \leq n, m \leq j$ の成分からなる $z - A$ の小行列式を $D(i, j)$ で表すとき、次の表式が成り立つ。

$$K^{+}(1; z) = -\frac{(-1)^N h b_1 \cdots b_{N-1} + b_0 D(2, N-1)}{D(1, N-1)} \tag{8.7}$$

$$K^{-}(1; z) = -\frac{(-1)^N h^{-1} b_1 \cdots b_{N-1} + b_0 D(2, N-1)}{D(1, N-1)} \tag{8.8}$$

Proposition 5 A は点スペクトルを持たない。A の固有関数展開公式は (3.9) あるいは (3.10) の形にかける。その際、密度行列は

$$d\mu_+(\lambda) = d\mu_-(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\frac{|D(1, N-1)|}{|b_0 b_1 \cdots b_{N-1}|\sqrt{4-\Delta^2}}, \quad \lambda \in \sigma(A) \tag{8.9}$$

で与えられる。また、

$$K^-(n;\lambda + i0) = K^+(n;\lambda - i0) = \overline{K^+(n;\lambda + i0)} \tag{8.10}$$

故に、(3.10) は

$$d\Theta(n, m;\lambda) = 2\Re\{K^+(n;\lambda + i0)\overline{K^+(n;\lambda + i0)}\}d\mu_+(\lambda) \tag{8.11}$$

と簡略化される。

$D(1, N-1) = \prod_{k=1}^{N-1}(z-\mu_k)$ は zの $N-1$ 次多項式である。その根はすべて実数であって, $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_{N-1}$とするとき、

$$\lambda_2 < \mu_1 < \lambda_3 < \lambda_4 < \cdots < \mu_{N-1} < \lambda_{2N-1} < \lambda_{2N} \tag{8.12}$$

と分離される。

(8.9) からみられるように、固有関数展開において、補助スペクトラム $\mu_1, ..., \mu_{N-1}$ が極めて重要である。実は、つぎの節でみるように、これは LR-アルゴリズムにおいても中心的役割をはたす。

9 周期戸田格子の LR-アルゴリズム

A は正定値と仮定する。特に $a_n > 0$ である。

まず、A の Gauss 分解を求める。$A_\pm$ をそれぞれ対角成分はすべて正である、上および下 3 角 Jacobi 行列で, かつ周期 Nの周期行列とする。

$$A = A_- \cdot A_+, \quad A_- = {}^tA_+ \tag{9.1}$$

を満たすように求める。

A_+ の成分を $a_{n,n} = \xi_n > 0$, $a_{n,n+1} = \eta_n$ とおく。$\xi_{n+N} = \xi_n$, $\eta_{n+N} = \eta_n$ が成り立つように $A_\pm$を決める。このとき、(9.1) より 等式

$$a_n = \xi_n^2 + \eta_{n-1}^2, \quad b_n = \xi_n\eta_n \quad 0 \le n \le N-1 \tag{9.2}$$

が得られる。

(9.2) より、ξ_0^2 は 2 次方程式

$$\xi_0^2 = \frac{b_0^2|}{|a_1} - \frac{b_1^2|}{|a_2} - \cdots - \frac{b_{N-1}^2|}{|a_0 - \xi_0^2} \tag{9.3}$$

を解けばよい。ξ_0^2 は一意には定まらない。そこで、ξ_0^2を (9.3) を満たすように、 収束する周期連分数

$$\xi_0^2 = \frac{b_0^2|}{|a_1} - \frac{b_1^2|}{|a_2} - \cdots - \frac{b_{N-1}^2|}{|\ a_0} - \frac{b_0^2|}{|a_1} - \cdots \tag{9.4}$$

として定める。これによって、ξ_n, η_n は自動的に決定される。(3.6) に注意すると、等式

$$\xi_0^2 = -b_0 K^+(1;0) \tag{9.5}$$

が成り立つ。

さて、このようにして、定まった $A_\pm$を用いて、LR-変換

$$A = A_- \cdot A_+ \to A' = A_+ \cdot A_- = A_+ \cdot A \cdot A_+^{-1} \tag{9.6}$$

が定義される。

次の Propsition 6 がもっとも基本的である。

Proposition 6 A'の密度関数に表れる補助スペクトラムを $\{\mu'_1, \mu'_2, ..., \mu'_{N-1}\}$ とするとき、等式

$$z\frac{\prod_{k=1}^{N-1}(z-\mu'_k)}{\prod_{k=1}^{N-1}(z-\mu_k)} = (\xi_0 + \eta_0 K^+(1;z))(\xi_0 + \eta_0 K^-(1;z)) \tag{9.7}$$

が成り立つ。逆に、(9.7) を解くことによって、$\xi_0 > 0, \eta_0, \mu'_1, ..., \mu'_{N-1}$ が一意に定まる。

Proof 2 A'の *Bloch* 解は

$$K'_+(n;z) = \frac{\xi_n K^+(n;z) + \eta_n K^+(n+1;z)}{\xi_0 + \eta_0 K_+(1;z)} \tag{9.8}$$

で与えられる。

まず、(9.7) が成り立つとき、(9.6) が得られることを示す。
点 $z=\infty$ において、$K^{\pm}(n;z)$ は有理型であって、

$$K^{+}(n;z)=O(z^{-n}),\ \ K'^{+}(n;z)=O(z^{-n})$$

に注意すると、実上 3 角行列 $\Xi=(\xi)_{n,m=-\infty}^{\infty}$ があって

$$K'^{+}(n;z)=\sum_{m=n}^{\infty}\xi_{n,m}K^{+}(m;z) \tag{9.9}$$

と一意に表される。(2.5),(2.6) および (8.9),(8.11) から作用素の関係式

$$1=\Xi\cdot\frac{\prod_{k=1}^{N-1}(A-\mu'_k)}{\prod_{k=1}^{N-1}(A-\mu_k)}\cdot{}^t\Xi \tag{9.10}$$

$$A'=\Xi\cdot A\cdot\frac{\prod_{k=1}^{N-1}(A-\mu'_k)}{\prod_{k=1}^{N-1}(A-\mu_k)}\cdot{}^t\Xi=\Xi\cdot A\cdot\Xi^{-1} \tag{9.11}$$

が得られる。また、(2.5),(2.6) から 上 3 角行列 $Y=(\eta_{n,m})_{n,m=-\infty}^{\infty}$ があって

$$(\xi_0+\eta_0K^{+}(1;z))K^{+}(n;z)=\sum_{m=n}^{\infty}\eta_{n,m}K^{+}(m;z) \tag{9.12}$$

また、同じことだが、

$$\eta_{n,m}=2\int_{-\infty}^{\infty}\Re(\xi_0+\eta_0K^{+}(1;\lambda+i0))K^{+}(n;\lambda+i0)\overline{K^{+}(m;\lambda+i0)}d\mu_{+}(\lambda) \tag{9.13}$$

と表される。すなわち、

$$\xi_0+\eta_0K^{+}(1;A)=Y \tag{9.14}$$

同じく

$$\xi_0+\eta_0K^{-}(1;A)={}^tY \tag{9.15}$$

故に、(9.7) より作用素の関係

$$A\frac{\prod_{k=1}^{N-1}(A-\mu'_k)}{\prod_{k=1}^{N-1}(A-\mu_k)}=Y\cdot{}^tY={}^tY\cdot Y \tag{9.16}$$

作用素の可換性に注意して、(9.10) より

$$
\begin{aligned}
A = {}^tY \cdot \frac{\prod_{k=1}^{N-1}(A-\mu_k)}{\prod_{k=1}^{N-1}(A-\mu'_k)} \cdot Y \\
= {}^tY \cdot {}^t\Xi \cdot \Xi \cdot Y
\end{aligned}
$$

これが A の *Gauss* 分解に他ならない。すなわち、

$$
A_- = {}^tY \cdot {}^t\Xi, \quad A_+ = \Xi \cdot Y \tag{9.17}
$$

(9.11) より

$$
A' = A_+ \cdot Y^{-1} \cdot A \cdot Y \cdot A_+^{-1} = A_+ \cdot A \cdot A_+^{-1}
$$

で (9.6) を得る。

次に、(9.6) から (9.7) が導かれることを示す。

$$
\psi' = A_+(K^+) \tag{9.18}
$$

$n=0$ で 1 に等しくなるように正規化して、

$$
K'^+(n;z) = \frac{\psi'(n)}{\psi'(0)} \tag{9.19}
$$

とおく。すると、関係式 (9.9) が成り立つような *3* 角行列 Ξがある。故に、

$$
\{A_+(K^+)\}(n;z) = \{(\xi_0 + \eta_0 K^+(1;z))\Xi(K^+)\}(n;z) = \{\Xi \cdot Y(K^+)\}(n;z)
$$

言い換えれば、

$$
A_+ = \Xi \cdot Y \tag{9.20}
$$

これより

$$
\begin{aligned}
\{A'\}_{n,m} = \{A_+ \cdot A_-\}_{n,m} = \{\Xi \cdot Y \cdot {}^tY \cdot {}^t\Xi\}_{n,m} \\
= 2\int_{\infty}^{\infty} \Re(\xi_0 + \eta_0 K^+(1,\lambda+i0))(\xi_0 + \eta_0 K^+(1,\lambda-i0)) \\
K'^+(n,\lambda+i0))K'^+(m,\lambda-i0))d\mu_+(\lambda)
\end{aligned} \tag{9.21}
$$

一方、定義より

$$\{A'\}_{n,m} = 2\int_{\infty}^{\infty} \lambda \Re\{\lambda K'^{+}(n;\lambda+i0)K'^{+}(m;\lambda-i0)\}d\mu'_{+}(\lambda)$$

故に

$$\lambda d\mu'_{+}(\lambda) = (\xi_0 + \eta_0 K^{+}(\lambda+i0))(\xi_0 + \eta_0 K^{+}(\lambda-i0))d\mu_{+}(\lambda)$$

でなくてはならない。

$$d\mu'_{+}(\lambda) = \frac{\prod_{k=1}^{N-1}(\lambda-\lambda'_k)}{\prod_{k=1}^{N-1}(\lambda-\lambda_k)} d\mu_{+}(\lambda)$$

であるから、(9.7) が得られた。

(8.3) が定義する超楕円曲線 X は 2 枚の葉片を持っている。物理的面と非物理的面である。$\lambda \notin \sigma(A)$ のとき、物理的（非物理的）面は, それぞれ $|h| < 1$ (> 1) によって定義される。

Bloch 解を X での因子類を用いて表す。$z = 0,\ \infty$ は X の分枝点ではないので、$z = 0$ にのっている Xの点の因子はそれぞれ 2 個ある。物理的面にあるものを $\langle 0\rangle,\langle\infty\rangle$, 非物理的面にあるものを $\langle 0^*\rangle,\langle\infty^*\rangle$ であらわす。

このとき、

Lemma 4 超楕円曲面 X上の有理型関数 $K^{+}(n;z)$ は、$z = \mu_1,\ \mu_2, \ldots, \mu_{N-1}$ にのっている X の点で 1 位の極、∞^*で n 位の極を持つ。前者の点からなる正の因子は n によらない。それを D_0とする。また、$K^{+}(n;z)$ の零点に応ずる因子をそれぞれ D_n, $\langle\infty\rangle$ とする．また、Xから zの複素平面への射影に関して、D_0, D_nの共役因子を、それぞれ D_0^*, D_n^*とおく。

したがって、因子として, 等式

$$(K^{+}(n;z)) = n\langle\infty\rangle - n\langle\infty^*\rangle - D_0 + D_n \tag{9.22}$$

$$(K^{-}(n;z)) = n\langle\infty^*\rangle - n\langle\infty\rangle - D_0^* + D_n^* \tag{9.23}$$

さらに、

$$\prod_{k=1}^{N-1}(z-\mu_k) = -(N-1)\{\langle\infty\rangle + \langle\infty^*\rangle\} + D_0 + D_0^* \tag{9.24}$$

$$(h) = N(\langle\infty\rangle - \langle\infty^*\rangle) \tag{9.25}$$

が成り立つ。

一方、$\xi_0 + \eta_0 K^{+}(1;z)$ の 零点および 極については、(9.7) から

Theorem 2 次数 $N-1$ の正因子 D_0' および その共役 $D_0'^*$ が存在して、

$$(\xi_0+\eta_0 K^+(1;z)) = \langle 0\rangle - \langle\infty^*\rangle - D_0 + D_0' \tag{9.26}$$
$$(\xi_0+\eta_0 K^-(1;z)) = \langle 0^*\rangle - \langle\infty\rangle - D_0^* + D_0'^* \tag{9.27}$$

故に、$(K'^+(1;z))$ については、次数 $N-1$ の正因子 D_1'が存在して、

$$(K'^+(1;z)) = \langle\infty\rangle - \langle\infty^*\rangle - D_0' + D_1' \tag{9.28}$$

と表される。

Xの次数 $N-1$ の因子類は Xの Jacobi 多様体 $Jac(X)$ をなす。(9.13) からわかるように、$Jac(X)$ の点として

$$D_0' - D_0 \equiv -\langle 0\rangle + \langle\infty^*\rangle \tag{9.29}$$

さて、新たな作用素 A' に対して、引続き LR-変換を施すことができる。これを繰り返せば、Jacobi 作用素の列

$$A \to A' \to A'' \to \cdots \tag{9.30}$$

が得られる。これに応じて因子類の列

$$D_0 \to D_0' \to D_0'' \to \cdots \tag{9.31}$$

が得られる。そして、

$$D_0' - D_0 \equiv D_0'' - D_0' \equiv \cdots \equiv -\langle 0\rangle + \langle\infty^*\rangle \tag{9.32}$$

結論として、

Theorem 3 *LR* 変換 (9.6) は $\mathbf{p}_0 = D_0$から始まる *Jacobi* 多様体上の点 $\mathbf{p}$ の離散的平行移動

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{p}_0 + m\{-\langle 0\rangle + \langle\infty^*\rangle\},\quad m = 0,1,2,3,\ldots. \tag{9.33}$$

によって実現される。

Corollary 1 逐次 *LR*-変換 (9.30) が ある正整数 Mを周期とする 周期的な変換列になるための必要十分条件は

$$M\{-\langle 0\rangle + \langle\infty^*\rangle\} \equiv 0 \tag{9.34}$$

となることである。

Remark 2 行列 A が有限または半無限のときには、LR-変換列は決して周期的になることはない。実際、このような変換を繰り返すことにより、行列 A は次第に対角行列に近づく。A が有限行列のときには、実際この方法で A の固有値がが近似されるのであった ([15],[16],[17])。しかし、A が半無限のときに何に近づくのかは、私には明らかではない。

Remark 3 $f(z)$ が r次多項式のとき、等式 (9.7) を一般の LR-アルゴリズム (5.2) に拡張することは可能である。このとき、(9.7) は

$$f(z)\frac{\prod_{k=1}^{N-1}(z-\mu'_k)}{\prod_{k=1}^{N-1}(z-\mu_k)} = (\xi_0 + \sum_{k=1}^{r}\eta_{0,k}K^+(k;z))(\xi_0 + \sum_{k=1}^{r}\eta_{0,k}K^-(k;z))$$

という関係式に置き換えられる。

10 $N=2$ の場合

前節において、$N=2$ の場合はすべてが明示的に表されるので、今節で、これを与える。

A は $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ を与えることと同値である。$W(z) = b_0^2 b_1^2(\Delta^2 - 4)$ とおくとき、

$$W(z) = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)(z-\lambda_4),\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 \quad (10.1)$$

さらに、

$$d\mu_\pm = \frac{1}{4\pi}\frac{|\lambda - a_1|}{\sqrt{|W(\lambda)|}},\ \lambda_2 < a_1 < \lambda_3 \quad (10.2)$$

$$K^+(1;z) = \frac{b_0 + b_1 h}{z - a_1},\ K^-(1;z) = \frac{b_0 + b_1 h^{-1}}{z - a_1}, \quad (10.3)$$

(9.7) は

$$z\frac{z - a'_1}{z - a_1} = (\xi_0 + \eta_0 K^+(1;z))(\xi_0 + \eta_0 K^-(1;z)) \quad (10.4)$$

いま

$$u = \int_{\lambda_4}^{z}\frac{dz}{\sqrt{W(z)}}, v = \int_{\lambda_4}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{W(z)}} > 0, w = \int_{\lambda_4}^{0}\frac{dz}{\sqrt{W(z)}} > 0$$

$$v-c=\int_{\lambda_4}^{a_1}\frac{dz}{\sqrt{W(z)}},\quad v>\Re c>0,\Im c<0$$
$$\omega_1=\int_{\lambda_2}^{\lambda_3}\frac{dz}{\sqrt{W(z)}}>0,\omega_2=i\int_{\lambda_3}^{\lambda_4}\frac{dz}{\sqrt{|W(z)|}}\in i\mathbf{R}_{>0}$$

とおくと、$2\omega_1,2\omega_2$が2重周期であって、$\langle 0\rangle$, $\langle 0^*\rangle$, $\langle\infty\rangle$, $\langle\infty^*\rangle$ はそれぞれ

$$u=w,\quad u=-w,\quad u=v,\quad u=-v$$

に対応している。さらに、

$$4v=2\omega_1\equiv 0$$

すなわち、

$$D_2-D_0\sim 0$$

楕円曲線 X上の シグマ関数$\sigma(u)$ は $u=0$ で零点を持ち、準周期性

$$\sigma(u+2\omega_1)=-e^{2(\eta_1 u+\omega_1)}\sigma(u)$$
$$\sigma(u+2\omega_2)=-e^{2(\eta_2 u+\omega_2)}\sigma(u)$$

(η_1, η_2は定数) を満たすが、これを用いるならば、

$$z=-\frac{\sigma(u+w)\sigma(u-w)\sigma(2v)}{\sigma(u-v)\sigma(u+v)\sigma(v+w)\sigma(v-w)}$$
$$h=C_1\frac{\sigma^2(u-v)}{\sigma^2(u+v)}$$
$$K^+(1;z)=C_2\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v+c)}{\sigma(u+v)\sigma(u-v+c)}$$
$$K^{+\prime}(1;z)=C_3\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v+c')}{\sigma(u+v)\sigma(u-v+c')}$$

と表される。故に、

$$c'-c=v+w=\int_{0^*}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{W(z)}}$$

とおくと、LR-変換列は楕円曲線を表す複素1次元トーラス $\mathbf{C}/(\mathbf{Z}\omega_1+\mathbf{Z}\omega_2)$ 上の平行移動

$$c \to c+v+w \to c+2(v+w) \to \cdots$$

で表される。これが、周期的であるための必要十分条件はある正整数 M に対して

$$M(v+w) \equiv 0 \quad (2\omega_1, 2\omega_2)$$

となることである。

References

[1] K.Aomoto, *Self-adjointness and limit pointness for adjacency operators on a tree,* J. d'Anal. Math., 53(1989), 219-232.

[2] K.Aomoto, *A formula of eigenfunction expansions I Case of asymptotic trees,* Proc. Japan Acad., 61, Ser.A, N0.1(1985).

[3] K.Aomoto, *Point spectrum on a quasi homogeneous tree,* Pacific J. Math., 147(1991), 231-242.

[4] R.Askey and J.A.Wilson *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials,* Mem. Amer. Math. Soc.,1985..

[5] J.M.Berezanski, *Expansions in eigenfunctions of self-adjoint operators,* AMS Transl., 17(1968).

[6] M.Case and M.Kac, *A discrete version of the inverse scattering problem,* J.Math. phys.,14(1973),594-603

[7] H.Flaschka, *The Toda Lattice II, Inverse scattering solution,* Prog. Theoret. Phys., 51(1974), 703-716.

[8] I.M.Gelfand and B.M.Levitan, *On the determination of a differential equation from its spectral function* AMS Transl.(2),1, 253-304(1955) .

[9] S.Kakei, *Dressing method and the coupled KP hierachy* preprint, 1999.

[10] Y.Kato and K.Aomoto, *Jacobi-Perron algorithmus, bi-orthogonal polynomials and inverse scattering problems* Publ. R.I.M.S., 20(1984), 635-658.

[11] J.Moser *Integrable Hamiltonian systems and spectral theory* Pisa, 1981.

[12] P.van Moerbeke and D.Mumford *The spectrum od difference operators and algebraic curves,* Acta Math., 143, 93-154(1979).

[13] A.Mukaihira and Y.Nakamura, *Schur flow for orthogonal polynomials on the unit circle and its integrable discretization,* preprint, 1999.

[14] 中村佳正, 戸田分子・*Laplace* 変換・*BCH-Goppa* 復号法 (可積分系によるアルゴリズム開発は可能か?), 数理科学 No.405,March,1997.

[15] H.Rutishauser, *Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus,* Zeit. und angew. Math. Phys.,5(1954),233-251.

[16] H.Rutishauser, *Anwendungen des Quotienten-Differenzen-Algorithmus,* Zeit. und angew. Math. Phys.,5(1954),496-508

[17] H.Rutishauser, *Une methode pour la determination des valeurs propres d'une matrice,* C.R.Acad.Sci.Paris 240(1955), 34-36

[18] V.Spiridonov and A.Zhedanov *Discrete Darboux transformations, the discrete-time Toda lattice and the Askey-Wilson polynomials,* Methods and Appli. of Anal., 2(4), 1995, 369-398.

[19] M.Toda, *Non-linear lattice waves,(in Japanese)* Iwanami, 1978.

[20] G.Wilson *Infinite-dimensional Lie groups and algebraic geometry in soliton theory,* Phil. Trans. R. Soc. Lond.A315, 393-404(1985)

[21] V.E.Zakhalov and A.B.Shabat, *A scheme for integrating the non-linear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem I,* Funct Anal and Its Appli., 8(1974),226-235.